1997年　東大数学　文系第3問

$P(x.y.z)$ とおくと。

$|\vec{PA}|^2 = (x-1)^2+y^2+z^2$

$|\vec{PB}|^2 = x^2+(y-1)^2+z^2$

$|\vec{PC}|^2 = x^2+y^2+(z-1)^2$

$|\vec{PO}|^2 = x^2+y^2+z^2$　である。

{ x.y.z.rの4文字 3本の式 の 連立方程式を解く

$|\vec{PA}| = |\vec{PB}| = r|\vec{PO}|$ より $|\vec{PA}|^2=|\vec{PB}|^2=r^2|\vec{PO}|^2$

$\Leftrightarrow |\vec{PA}|^2=|\vec{PB}|^2$ …① かつ $|\vec{PB}|^2=r^2|\vec{PO}|^2$ …②

$|\vec{PC}| = |\vec{PO}|$ より $|\vec{PC}|^2=|\vec{PO}|^2$ …③ として

それぞれ代入すると

① $\Leftrightarrow (x-1)^2+y^2+z^2 = x^2+(y-1)^2+z^2$

$\Leftrightarrow -2x+1 = -2y+1$　　$x=y$ …①'

② $\Leftrightarrow x^2+y^2-2y+1+z^2 = r^2(x^2+y^2+z^2)$

$\Leftrightarrow (r^2-1)x^2+(r^2-1)y^2+(r^2-1)z^2+2y-1=0$

…②'

③ $\Leftrightarrow x^2+y^2+(z-1)^2 = x^2+y^2+z^2$

$-2z+1=0$　　$z=\frac{1}{2}$ …③'

①'と③'を②'に代入して。

$(r^2-1)x^2+(r^2-1)x^2+(r^2-1)\cdot\frac{1}{4}+2x-1=0$

$2(r^2-1)x^2+2x+\frac{1}{4}r^2-\frac{5}{4}=0$

$8(r^2-1)x^2+8x+r^2-5=0$ …④

3本の連立方程式を使ってシンプルにした結果。

求める条件は ④を満たすxが2つ存在するrの条件である。

x^2の係数が文字式なので 場合わけ。

(i) $r^2=1 \Leftrightarrow r=1$ ($\because r>0$) のとき

④ $\Leftrightarrow 8x-4=0 \Leftrightarrow x=\frac{1}{2}$　$(x.y.z)=(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2})$

xの解が1つしか存在しないので、不適。

安心して $r^2 \neq 1$ としてよい。

(ii) $r^2\neq 1 \Leftrightarrow 0<r<1$ または $1<r$ のとき

④の判別式Dに対して、$D>0$ となればよい。

$D/4=(-4)^2-8(r^2-1)(r^2-5)>0$

$16-8(r^4-6r^2+5)>0$

$-8r^4+48r^2-24>0$

$r^4-6r^2+3<0$

$3-\sqrt{6}<r^2<3+\sqrt{6}$　$r>0$で解くと

$\sqrt{3-\sqrt{6}}<r<\sqrt{3+\sqrt{6}}$

$0<r<1$ または $1<r$ と連立して

$\sqrt{3-\sqrt{6}}<r<1$ または $1<r<\sqrt{3+\sqrt{6}}$ //

このとき、④の解は、

$$x=\frac{-4\pm\sqrt{(-4)^2-8(r^2-1)(r^2-5)}}{8(r^2-1)}$$

$$=\frac{-4\pm\sqrt{-8r^4+48r^2-24}}{8(r^2-1)}$$

$$=\frac{-2\pm\sqrt{-2r^4+12r^2-6}}{4(r^2-1)}$$

$x=y$, $z=\frac{1}{2}$ より 求めるPの座標は

$$\left(\frac{-2\pm\sqrt{-2r^4+12r^2-6}}{4(r^2-1)},\ \frac{-2\pm\sqrt{-2r^4+12r^2-6}}{4(r^2-1)},\ \frac{1}{2}\right)$$ //

おまけ

$0<x$, $0<y$ のとき　$x=y \Leftrightarrow x^2=y^2$ である。(十分性OK)

今回は、ベクトルの大きさで、例えば $|\vec{PA}|=\sqrt{\bigcirc}>0$

なので 十分性は担保される。また、

$|\vec{PA}|=\sqrt{(x-1)^2+y^2+z^2}$ などで、x.y.z に負の値を代入しても

よいことも安心。